Programme de colle n°17

semaine du 2 au 6 février

Notions vues en cours

Chapitre 22 : Polynômes (Partie A) – suite et fin

- **Opération** $\circ$ sur $\mathbb{K}[X]$: définition, associativité, degré de $P \circ Q$
- Évaluation de P en $\alpha \in \mathbb{K}$, qu'on note $P(\alpha)$. Fonction polynômiale : définition, on note $f_P \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ la fonction associée à P, l'application $P \mapsto f_P$ est "compatible" avec les lois $+, \times, \lambda\cdot, \circ$ définies sur $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Polynôme dérivé P', compatibilité $(f_P)' = f_{P'}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, degré de P', dérivées de $\lambda P + \mu Q$, de PQ et de $P \circ Q$
- **Dérivée n-ième de** P notée $P^{(n)}$, degré de $P^{(n)}$, dérivées n-ièmes de $\lambda P + \mu Q$ et de PQ
- **Formule de Taylor** (valide pour tout $n \geq \deg P$), si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)$, injectivité de $P \mapsto f_P$

Chapitre 23 : Polynômes (Partie B)

- **Divisibilité dans** $\mathbb{K}[X]$, notation $B \mid A$, deux polynômes P et Q sont dits associés si $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad P = \lambda Q$, il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X]$, $P \mid Q$ ssi $\lambda P \mid \mu Q$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$
- Si $B \mid A$ et $A \neq 0$ alors $\deg B \leq \deg A$; si $B \mid A$ et $\deg B = \deg A$, alors B et A sont associés
- La relation $\mid$ est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique : $B \mid A$ et $A \mid B$ ssi A et B sont associés
- $D \mid A$ et $D \mid B$ entraine que pour tous U, V on a $D \mid AU + BV$; si $A \neq 0$, alors $AB \mid AC$ ssi $B \mid C$
- **Division euclidienne de deux polynômes**, calcul pratique de la division euclidienne, lorsque $B \neq 0$, on a $B \mid A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul
- On appelle un **PGCD** de deux polynômes A et B tout diviseur commun de degré maximal, les différents PGCD sont associés deux à deux, et on appelle le PGCD celui qui est unitaire : il est unique et noté $A \wedge B$
- Propriétés "classiques" du PGCD : $(\lambda A) \wedge (\mu B) = A \wedge B$ pour tous λ, μ non nuls, $A \wedge \lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, etc. **Algorithme d'Euclide (y compris étendu)**, théorème de Bézout-Bachet, coefficients de Bézout
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, $\frac{A}{A \wedge B}$ et $\frac{B}{A \wedge B}$ sont premiers entre eux
- Corollaires de Bézout : Lemme de Gauss ; $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$ entraine $AB \mid C$; $A \wedge B_1 = 1$ et $A \wedge B_2 = 1 \implies A \wedge (B_1 B_2) = 1$
- **PPCM** de deux polynômes : définition, unicité, notation $A \vee B$, propriétés classiques, le polynôme $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB
- PGCD d'un nombre fini de polynômes, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble / deux à deux, extension des théorèmes de Bézout et Bézout-Bachet
- **Racine d'un polynôme**, $P(\alpha) = 0$ ssi $X - \alpha \mid P$, extension avec un nombre fini de racines distinctes, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines distinctes
- **Multiplicité d'une racine**, racine simple / multiple / double / triple, α est de multiplicité *exactement* m ssi $(X-\alpha)^m \mid P$ et $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P$ ssi $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$, caractérisations similaires pour "α est de multiplicité *au moins* m"
- P admet pour racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ de multiplicités au moins $m_1, \cdots, m_p$ ssi $(X-\alpha_1)^{m_1} \cdots (X-\alpha_p)^{m_p} \mid P$, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité
- **Polynôme d'interpolation de Lagrange** associés à des points d'abscisses distinctes

Les relations coefficients-racines et la notion de polynôme scindé sont hors programme cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **19, 20** et **22**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.* ***Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Formule de Taylor : on ne démontrera la formule que pour les monômes unitaires, puis l'examinateur posera un exemple d'application directe dans l'esprit du TD 22, exercice 2
   Chapitre 22, Théorème 22.33
2. Théorème de la division euclidienne de deux polynômes : énoncé, puis démonstration de l'unicité Chapitre 23, Théorème 23.8
3. Calcul d'un PGCD et du PPCM de deux polynômes donnés par l'examinateur, ainsi que d'un couple de coefficients de Bézout Chapitre 23, Sections 1.4, 1.5 et 1.7
4. Soit $a,b,c \in \mathbb{K}$. Déterminer l'expression, en fonction de a, b et c, d'un polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points (x_1,a), (x_2,b) et (x_3,c) avec x_1,x_2,x_3 donnés par l'examinateur. Chapitre 23, Section 3

Questions Flash au programme :

Chapitre 22 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P+Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\cdots} c_k X^k$ avec $c_k = \ldots$
- Que peut-on dire du degré de $P \circ Q$ si Q est constant ? et si Q est non constant ?
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\cdots} (\ldots) X^k$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P

Chapitre 20 :

- Soit A,B des matrices de tailles respectives (n,p) et (p,q). Rappeler la formule qui exprime $\left[AB\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit E^{ij} et $E^{k\ell}$ deux matrices élémentaires. Compléter la formule : $E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{\cdots} E^{\cdots}$
- Quelle structure algébrique peut-on mettre sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Donner la forme (avec des 0, des $*$...) d'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Idem pour les matrices triangulaires supérieures et inférieures.
- Si A et B sont diagonales, que peut-on dire de AB ? peut-on dire la même chose pour des matrices triangulaires ?
- Rappeler la formule du binôme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ainsi que la formule $A^m - B^m$.
- Que *suffit-il* de vérifier pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est la taille de $A^\top$? Exprimer $\left[A^\top\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.

- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.

Chapitre 19 :

- Soit $\top$ une l.c.i. sur E et $e \in E$. Que doit vérifier e pour être un élément neutre pour $\top$?
- Soit $\top$ une l.c.i. sur E et $x \in E$. Que doit vérifier x pour être symétrisable pour $\top$?
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérifier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$. Donner une caractérisation de "H est un sous-groupe de G".
- Soit $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $f : G \to G'$. Que doit vérifier f pour être un morphisme ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de f. À quelle condition sur le noyau est-ce que f est injective ?
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation de l'image de f. À quelle condition sur l'image est-ce que f est surjective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "B est un sous-anneau de A"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\mathrm{Inv}(A)$) ?
- Que doit vérifier un anneau $(A, +, \times)$ pour être un anneau intègre ?
- Que doit-on vérifier pour que $(\mathbb{K}, +, \times)$ soit un corps ?